O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«OLIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

Neft va gaz fakulteti

GR-102 guruh

Referat

Bajardi: talaba Sh. G'iyosov

Tekshirdi: k. o'qit. E.O. Sharipov

QARSHI-2015

Mavzu: Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.
2. Funksiyaning aniqmas integrali.
3. Aniqmas integralning asosiy xossalari.
4. Asosiy aniqmas integrallar jadvali.

Mavzu: Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi

Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan *F(x)* funksiyaga ko'ra uning hosilasi $F'(x)=f(x)$ ni yoki differensiali $F'(x)dx=f(x)dx$ ni topishdir.

Endi teskari masala, ya'ni *F(x)* funksiyani uning ma'lum $f'(x)$ hosilasiga yoki $f'(x)dx$ differensialiga ko'ra topish amali bilan shug'ullanamiz.

1-ta'rif. Biror oraliqda aniqlangan *f(x)* funksiya uchun shu oraliqning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ yoki $dF(x)=f(x)dx$ shart bajarilsa, u holda *F(x)* funksiya shu oraliqda *f(x)* ning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan, $F(x)=sinx$ funksiya butun son o'qida $f(x)=cosx$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki istalgan *x* uchun

$F'(x)=(sinx)'=cosx=f(x)$. Shuningdek $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiya (-1,1) intervalda $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki intervaldan olingan barcha *x* lar uchun $F'(x)=(\sqrt{1-x^2})'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=f(x).$

Ixtiyoriy o'zgarmas *C* uchun $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$ funksiya butun son o'qida $f(x)=x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki istalgan *x* uchun $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$. Oxirgi misol funksiyaning boshlang'ich funksiyasi yagona bo'lmasligini ko'rsatadi.

1-eslatma. *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi *F(x)* (agar u mavjud bo'lsa) uzluksiz funksiya bo'ladi.

Haqiqatan. Boshlang'ich funksiyaning ta'rifiga binoan $F'(x)$ hosila mavjud va $F'(x)=f(x)$. Differensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligidan *F(x)* ning uzluksizligi kelib chiqadi.

Endi *F(x)* funksiya *f(x)* ning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lganda uning qolgan barcha boshlang'ich funksiyalari *F(x)+C* ko'rinishga ega bo'lishni ko'rsatamiz.

Bundan keyin *C* orqali ixtiyoriy o'zgarmas belgilanadi.

1-lemma. Biror oraliqda hosilasi nolga teng funksiya shu oraliqda o’zgarmasdir.

Isboti. Shartga ko’ra oraliqdagi barcha x uchun $f'(x)=0$. Oraliqqa tegishli $x_1<x_2$ qiymatlarni olib

$f(x_2)-f(x_1)=f'(z)(x_2-x_1), \qquad x_1<z<x_2$

Lagranj formulasini yozamiz. $f'(z)=0$ bo’lganligi uchun

$f(x_2)-f(x_1)=0$ yoki $f(x_2)=f(x_1)$ tenglikka ega bo’lamiz. Bu $f(x)$ funksiyaning qaralayotgan oraliqning istalgan nuqtalaridagi qiymatlari bir xil ekanligini ya‘ni u o’zgarmasligini ko’rsatadi.

1-teorema. Agar $F(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning biror oraliqdagi boshang’ich funksiyalari bo’lsa, u holda ular bir-biridan o’zgarmas songa farq qiladi: $\phi(x)-F(x)=C$.

Isboti. $\phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning eslatilgan oraliqdagi $F(x)$ dan farqli boshqa bir boshlangich funksiyasi bo’lsin, ya‘ni $\phi'(x)=f'(x)$.

U holda shu oraliqdagi ixtiyoriy x uchun

$[\phi(x)-F(x)]'=\phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ bo’ladi.

32.1- lemmaga muvofiq

$\phi(x)-F(x)=C$ yoki $\phi(x)=F(x)+C$ bo’ladi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror orliqdagi boshlang’ich funksiyasi bo’ladi, u holda uning shu oraliqdagi istalgan boshlang’ich funksiyasi $\phi(x)=$ $=F(x)+C$ ko’rinishga ega bo’ladi.

2-eslatma. Har qanday funksiya ham boshlang’ich funksiyaga ega bo’lavermaydi.

1-misol. $x=0$ nuqtada uzilishga ega

$$f(x)=\begin{cases} -1, & agar \quad -1<x<0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad 0<x<1 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya *(-1,1)* intervalda boshlang’ich funksiyaga ega emasligini ko’rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. *(-1,1)* intervalda *f(x)* funksiya uchun boshlang’ich funksiya *F(x)* mavjud bo’lsin. U holda ta‘rifga binoan *(-1,1)* intervalga tegishli barcha *x* lar uchun *F´(x)* hosila mavjud bo’lib *F´(x)= f(x)* tenglik o’rinli bo’ladi. Jumladan *F´(0)= f(0)* tenglik ham to’g’ri bo’ladi.*(0,1)* intervalga tegishli *x* qiymatni olib*[0,x]* kesmani qaraymiz. *F(x)* funksiya *[0,x]* kesmada uzluksiz, (0,*x*) intervalda differensiallanuvchi bo’lganligi sababli Lagranj formulaga binoan shunday *z (0<z<x)*qiymat mavjud bo’lib

$$F(x)-F(0)=F'(z)(x-0)=f(z)\cdot x=1\cdot x=x$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

Bundan $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ tenglikka yoki hosilaning ta‘rifiga asosan

$F'(0)=F'(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ tenglikka ega bo’lamiz. Bu tenglik *F´(0)= =f(0)=0* га zid. Bu ziddiyatga berilgan *f (x)* funksiya uchun *F (x)* boshlang’ich funksiya mavjud deb qilgan noto’g’ri farazimiz oqibatida keldik.

2-misol. *x=0* nuqtada uzilishga ega bo’lgan

$$f(x)=\begin{cases} +1, & agar\ -1<x\le 0 \quad bo'lsa, \\ 2x, & agar \quad 0<x<1 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun

$$f(x)=\begin{cases} x, & agar\ -1<x\le 0 \quad bo'lsa, \\ x^2, & agar \quad 0<x<1 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya *(–1,1)* oraliqda boshlang’ich funksiya bo’lishi ko’rinib turibdi.

Bu misollardan ko’rinib turibdiki uzilishga ega funksiyalar orasida boshlang’ich funksiyaga ega bo’lganlari ham ega bo’lmaganlari ham mavjud ekan.

2-teorema. Biror oraliqda uzluksiz funksiya shu oraliqda borshlang’ich funksiyaga ega.

Bu teoremaning isboti keyinroq keltiriladi.

2. Funksiyaning aniqmas integrali

2-ta'rif. Agar *F(x)* funksiya *f (x)* ning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, u holda *F(x)+C* ifoda *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$ –integral belgisi, *f(x)*-integral ostidagi funksiya, *f (x)dx* –integral ostidagi ifoda, *x*- integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

Demak, ta'rifga binoan $F'(x)=f(x)$ bo'lganda $\int f(x)dx=F(x)+C$ tenglik o'rinli bo'lar ekan.

Demak, $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$, chunki $(\ell n|x| + C)' = \frac{1}{x}$,

$\int \cos x dx=\sin x+c$ chunki $(\sin x+c)'=\cos x$,

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$, chunki $(tgx + c) = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad (\alpha \neq -1)$, chunki $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = x^\alpha$.

f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasini (aniqmas integralini) topish jarayoni shu funksiyani **integrallash** deyiladi.

Funksiyalarni differentsiyallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallardir.

3. Aniqmas integralning asosiy xossalari

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni $d\int f(x)dx= f(x)\, dx.$

3. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)\, dx= F(x)+c.$$

4. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x)= F(x)+c.$$

Keltirilgan xossalardan birini, masalan 1-xossani isbotlaymiz.

Haqiqatan ham,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+c)' = F(x)' + c' = F'(x)+0 = f(x).$$

5. O'zgarmas ko'patuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni agar $A=const$ bo'lsa

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (32.1)$$

bo'ladi.

6. Chekli sondagi funksiyalarning algebraik yigindisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning (agar ular mavjud bo'lsa) algebraik yig'indiga teng, ya'ni

$$\int [f(x)+q(x-\varphi(x)] dx = \int f(x)dx + \int q(x)dx - \int \varphi(x)dx \quad (32.2)$$

Bu xossalarni to'g'riligini ko'rsatish uchun tenglikning o'ng tomonidagi ifodalarning hosilasi uning chap tomonidagi itntegral ostidagi funksiyaga tengligini ko'rsatish kifoya.

Aniqmas integrallarning hisoblashda quyidagi qoidadan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Agar $\int f(x)dx = F(x)+c \quad (F'(x)) = f(x))$ bo'lsa $\int f(ax+в)dx = \frac{1}{a} F(ax+в)+c$

tenglik o'rinli, bunda a va $в$ o'zgarmas sonlar.

Haqiqatan. Oxirgi tenglikni o'ng qismini differensiallasak

$$(\frac{1}{a} F(ax+в)+c)' = \frac{1}{a} F(ax+в)\cdot(ax+в)' = \frac{1}{a} F'(ax+в)\cdot a = F'(ax+в) = f(ax+в)$$

hosil bo'ladi. Tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning hosilasi uning chap tomonidagi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligi o'sha tenglikni to'g'riligini ko'rsatadi.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{5x-4} = \frac{1}{5}\ell n|5x-4|+c, \quad \text{chunki} \quad \int \frac{dx}{x} = \ell n|x|+c;$$

$$\int \cos 13x dx = \frac{1}{13} sin13x+c, \quad \text{chunki} \quad \int cosxdx = sinx+c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(6x+5)} = \frac{1}{6}tg(6x+5)+c, \quad \text{chunki} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c.$$

4. Asosiy aniqmas integrallar jadvali.

Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali hamda aniqmas integralning ta‘rifidan foydalanib differensiallash yordamida bevosita tekshirib ko’rish mumkin bo’lgan ba‘zi-bir funksiyalarning integrallari jadvalini keltiramiz.

1. $\int 0dx=c.$

2. $\int dx=x+c.$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, (α-o’zgarmas son, $\alpha \neq -1$).

4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}+c \quad (x \neq 0).$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+c \quad (x > 0).$

6. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x|+c \quad (x \neq 0).$

7. $\int e^x dx = e^x + c.$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na}+c$

1. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

10. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z).$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c, \quad (x \neq \pi k, k \in Z).$

13. $\int tgxdx = -\ell n|\cos x|+c, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z).$

14. $\int ctgxdx = \ell n|\sin x|+c, \quad (x \neq \pi k, k \in Z).$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + c, \\ -arcctgx + c. \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c.$

$$17.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \quad (-1 < x < 1). \end{cases}$$

$$18.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

$$19.\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ell n \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$$

$$20. \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ell n \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$$

$$21.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ell n \mid x + \sqrt{x^2 + m} \mid + c.$$

$$22.\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ell n \left| a^2 \pm x^2 \right| + c \cdot$$

$$23.\int shxdx = -chx + c.$$

$$24.\int chxdx = shx + c.$$

$$25.\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c, \quad (x \neq 0).$$

$$26.\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c.$$

Keltirilgan formulalarning o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning hosilasi, uning chap tomondagi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligini ko'rsatish kifoyadir.

21-formulaning to'g'riligini ko'rsatamiz.

$$(\ell n(x + \sqrt{x^2 + m}))' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + m}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + m})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + m}} (1 + \frac{(x^2 + m)'}{2\sqrt{x^2 + m}}) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + m}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + m}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + m}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + m} + x}{2\sqrt{x^2 + m}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + m}}.$$

21-tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning hosilasila uning chap tomonidagi integral ostidagi funksiyaga teng ekan, demak bu tenglik to'g'ri.

1-izoh. Keltirilgan formulalar erkli o'zgaruvchi x o'rniga uning biror funksiyasi kelganda ham o'z kuchini saqlaydi.

Masalan,

$$\int \cos x^3 dx^3 = \sin x^3 + c, \qquad \int \frac{dx^2}{\sqrt{1 - x^4}} = \arcsin x^2 + c, \qquad \int \sin^4 x d \sin x = \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

va hokazo.

2-izoh. Ko'paytma va bo'linmaning integrallarini topish uchun maxsus formulalar yo'q. Bu o'z navbatida funksiyani integrallash amali uni differensiallashga nisbatan ancha murakkabligidan dalolat beradi (ayrim hollarni hisobga olmaganda).

Elementar funksiyalarning hosilalari elementar funksiya bo'lishini bilamiz. Ammo hamma elementar funksiyalarning aniqmas integrallari ham elementar funksiya bo'lavermaydi. Masalan,

$$\sin x^2, \quad \cos x^2, \quad e^{x^2}, \quad \frac{\sin x}{x} \ (x \neq 0), \quad \frac{\cos x}{x} \ (x \neq 0), \quad \frac{e^x}{x} \ (x \neq 0).$$

funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo'lganligi sababli ularning boshlang'ich funksiyalari mavjud, lekin ular elementar funksiyalar emas.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya qancha boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lishi mumkin?
3. Boshlang'ich funksiyalar bir-biridan qanday farq qiladi?
4. Har qanday funksiya boshlang'ich funksiyaga egami?
5. Qanaqa funksiyalar har doim boshlang'ich funksiyaga ega?
6. Funksiyaning aniqmas integrali nima?
7. Aniqmas integral qanaqa xossalarga ega?
8. Asosiy aniqmas integrallar jadvalini yozing.
9. Integrallar jadvalidagi formulalarning to'g'riligiga qanday ishonch hosil qilinadi?
10. Boshlang'ich funksiyasi elementar funksiya bo'lmagan uzluksiz funksiyalarga misollar keltiring?

Mustaqil yechish uchun mashqlar

Quyidagi funksiyalar qanaqa funksiyalar uchun boshlang'ich funksiya bo'lishi topilsin.

1. $\frac{x^2}{4} - 4\cos x - 9x + 3.$ Javob: $x^3 + 4\sin x - 9.$

2. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sin 2x+\ell n x-2.$ Javob: $\sqrt{x}+\cos 2x+\frac{1}{x}.$

3. $\frac{2^x}{\ell n 2}-\frac{1}{2x^2}-\ell n|\cos x|+4.$ Javob: $2^x+\frac{1}{x^3}-tgx.$

4. $3tgx-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+e.$ Javob: $\frac{3}{\cos^2 x}-x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}.$

5. $7\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ell n\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+6.$ Javob: $\frac{7}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{4-x^2}.$

6. $2\ell n|x+\sqrt{x^2+3}|-\frac{1}{2}\ell n(x^2+9)+4.$ Javob: $\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{x}{x^2+9}.$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука”, 2000.
2. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.