O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHOH BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

Referat

MAVZU:

FUNKSIYANING EKSTREMUMLARI

Bajardi: **Aliyev B**

Tekshirdi: **Qodirova Z.**

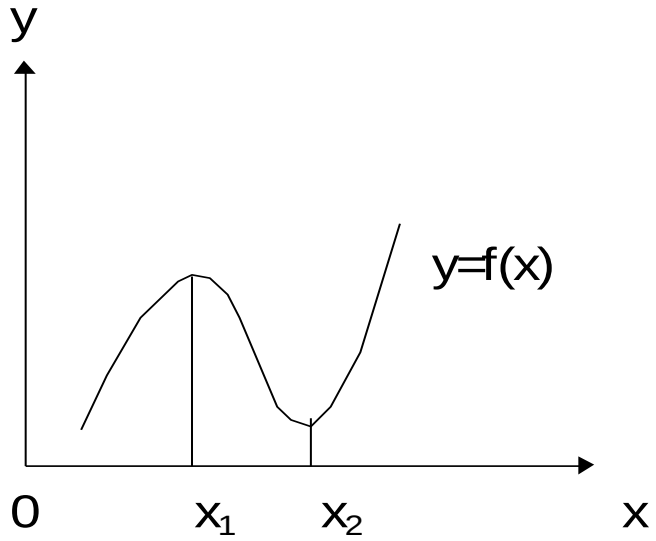
Toshkent 2015

FUNKSIYANING EKSTREMUMLARI.

Funksiyaning maksimumi va minimumi.

Ta'rif 1. Agar absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtiyoriy Δx uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga (max) ega deyiladi.

Ta'rif 2. Agar absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtieriy Δx uchun $f(x_2+\Delta x)>f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_2$ nuqtada minimumga (min) ega deyiladi (1-rasm).



1-rasm.

Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari deyiladi.

Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti.

Teorema: Agar differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo'lsa, u holda $f'(x_1)=0$ bo'ladi.

Isboti: Faraz qilamiz, $x=x_1$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'lsin deb. U holda, yetarli darajada kichik $\Delta x\neq 0$ uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ ni yozish mumkin.

Bundan: $f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ nisbatni ko'ramiz.

$\Delta x<0$ da $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0$, $\Delta x>0$ da $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0$ bo'ladi.

Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$f^{|}(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Agar Δx manfiyligicha qolib, nolga intilsa, u holda $f^{|}(x_1)\geq 0$ bo'ladi.

Agar Δx musbatligicha qolgan holda nolga intilsa, u holda $f^{|}(x_1)\leq 0$ bo'ladi.

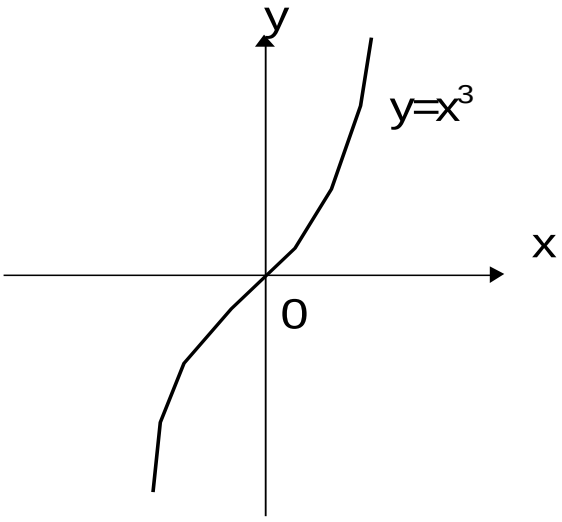
$f^{|}(x_1)$ ning qiymati Δx ning qanday holda nolga intilishiga bog'liq bo'lmagan aniq son bo'lgani uchun, tengsizliklar faqat $f^{|}(x_1)=0$ da birgalikda bo'ladi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi: agar argument «x» ning kœrilayotgan hamma qiymatlarida $f(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya x ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlaridagina ekstremumga ega bo'ladi.

Bunga teskari bo'lgan xulosa to'g'ri emas, ya'ni hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda albatta maksimum mavjud bo'lavermaydi.

Misol: $y=x^3$; $y^{|}=3x^2$; $3x^2=0$, $x=0$.

Funksiyaning hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi, lekin bu nuqtada funksiya na maksimumga na minimumga ega emas (2-rasm).



2-rasm.

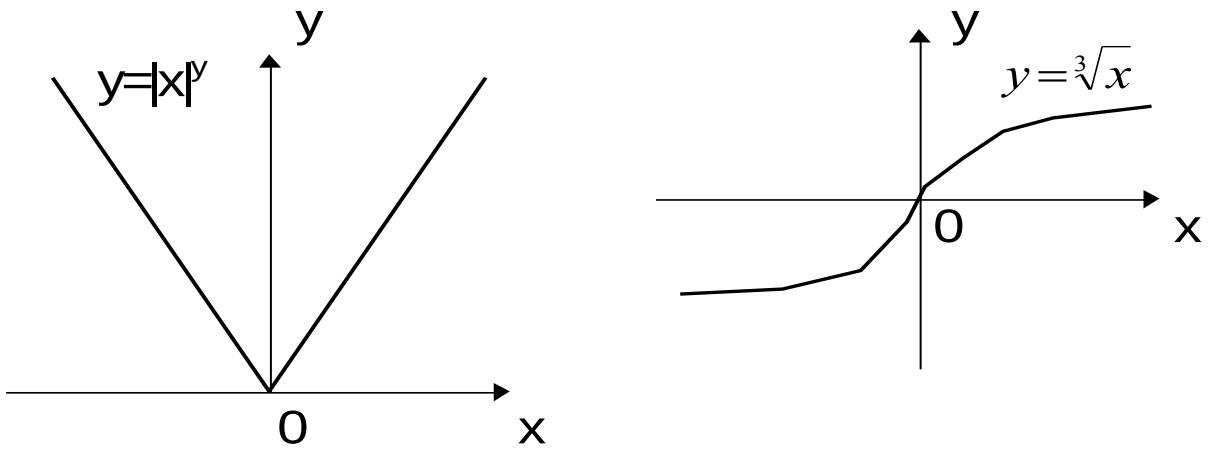
Misollar:

1) $y=[x]$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, lekin bu funksiya shu nuqtada minimumga ega.

2) $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning hosilasini topamiz.

$y^{|}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ bu funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, chunki $x\to 0$ da $y^{|}\to\infty$.

Bu nuqtada funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega emas.



2-rasm.

Hosila nolga aylanadigan argumentning qiymatlari kritik nuqtalari yoki kritik qiymatlari deyiladi.

Funksiya faqat 2ta holda: hosila mavjud va nolga teng bulgan nuqtalarda, yoki hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarda ekstremumga ega bo'lishi mumkin (3-rasm).

Ekstremum mavjudligining yetarli shartlari.

Teorema: $f(x)$ funksiya x_1 kritik nuqtani o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin.

1) Agar shu nuqtaning chap tomondan o'ng tomonga o'tishda hosilaning ishorasi «+» dan «-» ga o'zgarsa, funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.
2) Agar chapdan x_1 nuqta orqali o'ngga o'tishda hosilaning ishorasi «-« dan «+» ga o'zgarsa, funksiya shu nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti: 1) Hosilaning ishorasi «+» dan «-» ga o'zgarsin, ya'ni

$x<x_1$, da $f^{|}(x)>0$

$x>x_1$, da $f^{|}(x)<0$ bo'lsin deb faraz qilamiz.

$f(x) - f(x_1)$ ayirmaga Lagranj teoremasini qo'llaymiz:

$f(x) - f(x_1) = f^{|}(\xi)(x-x_1)$, $x<\xi<x_1$

$x<x_1$ bo'lsin.

U holda: $\xi<x_1$, $f^{|}(\xi)>0$, $f^{|}(\xi)(x-x_1) < 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x) - f(x_1) < 0$, $f(x) < f(x_1)$

$x>x_1$ bo'lsin. U holda: $\xi>x_1$, $f^{|}(\xi)<0$, $f^{|}(\xi)(x-x_1) < 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x) - f(x_1) < 0$, $f(x) < f(x_1)$.

Bulardan, x_1 nuqtada f(x) funksiya maksimumga ega ekanligi kelib chiqadi.

Differensiallanuvchi funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish.

Funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

1. Funksiyaning birinchi hosilasi $f^{|}(x)$ ni topamiz.
2. Argument x ning kritik qiymatlarini topamiz, buning uchun:
   a) birinchi hosilani nolga tenglaymiz va $f^{|}(x)=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini topamiz.
   b) x ning $f^{|}(x)$ hosila uzilishga ega bo'ladigan qiymatlarini topamiz.
3. Hosilaning kritik nuqtadan chapdagi va o'ngdagi $f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaymiz.

Natijada quyidagi sxema hosil bo'ladi:

Kritik nuqta x_1 dan o'tishda $f^{|}(x)$ hosilaning ishorasi			Kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f^{|}(x_1)=0$ yoki uziluvchi	_	Maksimum nuqtasi
_	$f^{|}(x_1)=0$ yoki uziluvchi	+	Minimum nuqtasi
+	$f^{|}(x_1)=0$ yoki uziluvchi	+	Funksiya faqat o'sadi
_	$f^{|}(x_1)=0$ yoki uziluvchi	_	Funksiya faqat kamayadi

Missolar. 1) $f(x)=3/4\, x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$

Yechish: funksiya $(-\infty; \infty)$ intervalda aniqlangan.

Uning hosilasini olamiz.

$f^{|}(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x^2 - x - 6) = 3x(x+2)(x-3)$

$f^{|}(x) = 0{,}3x(x+2)(x-3)=0$

$3x=0,\ x_1=0$

$x+2=0,\ x_2=-2$

$x-3=0,\ x_3=3$

Demak, funksiya $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$ kritik nuqtalarga ega.

Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasining ishorasini tekshiramiz.

Intervallar	$x<x_1$	$x_1<x<x_2$	$x_2<x<x_3$	$x_3<x$
$f^{|}(x)$ ishorasi	-	+	-	+

Demak, $x_1=-2$ nuqtada funksiya minimumga erishadi.

$y_{\min}|_{x=-2}=-9$

funksiya $x_2 = 0$ nuqtada maksimumga erishadi.

$y_{\max}|_{x=0}=7$

funksiya $x_3 = 3$ nuqtada minimumga erishadi.

$y_{min}|_{x=3}=-40\frac{1}{4}$.