O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
QARSHI MUHANDISLIK-IQTISODIYOT INSTITUTI

“OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

Mavzu: **Funksiyaning limiti va uzluksizligi**

REFERAT

Bajardi: “NGI-112” guruh talabasi Qodirov Ilhom
Qabul qildi: Burxonova Mastura

Qarshi 2015

Mavzu : Funksiyaning limiti va uzluksizligi

Reja:

1.Funksiyaning nuqtadagi limiti

2.Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

3.Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

4.Limitlar haqida asosiy teoremalar. Ajoyib limitlar.

5. Funksiyaning uzluksizligi

1.Funksiyaning nuqtadagi limiti

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo’lsin ($x=a$ nuqtaning o’zida aniqlanmagan bo’lishi ham mumkin). $D(f)$-funksiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo’lgan ixtiyoriy $\{x_n\}=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ ketma-ketlikni olamiz. $f(x)$ funksiyaning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni tashkil etadi.

Ta‘rif. Argument x ning a dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $y=f(x)$ funksiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, b son $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$ dagi) limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$ ko’rinishda yoziladi.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada faqat birgina limitga ega bo’ladi. Bu yaqinlashuvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

9-misol. $D(x)=\begin{cases} 1, agar\ x\ ratsional\ son\ bo'lsa, \\ 0,\ agar\ x\ irratsional\, son\ bo'lsa. \end{cases}$ Dirixle funksiyasi sonlar o’qining hech bir nuqtasida limitga ega emasligi ko’rsatilsin.

Yechish. Son o’qining istalgan x_0 nuqtasini olamiz. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(x_n)\}=\{1\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos bo’lib uning limiti 1 ga teng bo’lishi ravshan. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{\overline{x_n}\}$ irratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(\bar{x}_n)\}=\{0\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos kelib uning limiti 0 ga teng bo’ladi. Shunday qilib, x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ va $\{\bar{x}_n\}$ ketma-ketliklariga funksiyaning shu ketma-ketliklarni nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{D(x_n)\}$ va $\{D(\bar{x}_n)\}$ ketma-ketliklar har xil limitlarga ega. Bu funksiyaning limitga ega bo’lish ta‘rifiga xilof. Demak $D(x)$ funksiya x_0 nuqtada limitga ega emas. x_0 nuqta sonlar o’qining istalgan nuqtasi bo’lganligi uchun u sonlar o’qining hech bir nuqtasida limitga ega emas. Shunday qilib Dirixle funksiyasi aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega emas ekan.

Ta‘rif. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo’lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x nuqtalar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b chekli son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$ dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta‘rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. b son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti bo’lganda $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervalda yotadi.

Keltirilgan ta‘riflarni teng kuchliligini ko’rsatish mumkin.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=2$ ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.

Yechish. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyani x=5 nuqtaning biror atrofida, masalan (4,6) intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$ ni $x\neq 5$ deb quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|=\left|\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}-2\right|=\left|\frac{x+5}{x}-2\right|=\left|\frac{5-x}{x}\right|=\frac{|5-x|}{|x|}.$$

x>4 ekanini hisobga olsak $|x|$=x>4 bo'lib $\left|\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\dfrac{|5-x|}{4}$ kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $\delta=4\varepsilon$ deb olsak, u holda $0<|x-5|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\in(4;\,6)$ uchun $\left|\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\dfrac{\delta}{4}=\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyaning x=5 nuqtadagi limiti bo'lishi kelib chiqadi.

Ta'rif. Istalgancha katta M>0 son uchun shunday $\delta=\delta(M)>0$ son mavjud bo'lib, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik bajarilsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ funksiyani qaraylik. Ixtiyoriy M>0 sonni olsak, $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik $\left|x-2\right|<\dfrac{1}{M}$ bo'lganda bajarilishi ko'rinib turibdi. Agar $\delta=\dfrac{1}{M}$ deb olinsa, $\left|x-2\right|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>\dfrac{1}{\delta}=M$ yoki $\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $x\to 2$ da $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya'ni $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

2.Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N>0 son mavjud bo'lib, |x|>N tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi **limiti** deb ataladi va bu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ kabi yoziladi.

12-misol. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyani qaraylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ sonni olsak $|f(x) - b| = \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ bo'lib $N = \frac{1}{\varepsilon}$ desak, barcha |x|>N uchun $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \frac{1}{N} = \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan 1 soni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti bo'lishi ayon bo'ladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan yetarlicha katta M>0 son uchun shunday N>0 son topilsaki, |x|>N tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to \infty$ da cheksizlikka intiladi deyiladi va $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

13-misol. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = x^2$ funksiyani qaraylik. Istalgan M>0 sonni olib $|f(x)| > M$ tengsizlikni tuzamiz. x^2>M, bundan $|x| > \sqrt{M}$ kelib chiqadi. $N = \sqrt{M}$ deb olinsa, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $x^2 > N^2 = M$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ ekanini bildiradi.

3.Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

Teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti b chekli son bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli son bo'lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilib $(a-\delta,\ a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ yoki $|f(x)|-|b|\le|f(x)-b|<\varepsilon$, bundan $|f(x)|<|b|+\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M=|b|+\varepsilon$ deb olinsa a nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|f(x)|\le M$ tengsizlik bajariladi. Bu $f(x)$ funksiya $(a-\delta,\ a+\delta)$ intervalda chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar $f(x)$ funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo'lmasa, u holda $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bir tomonlama limitlar

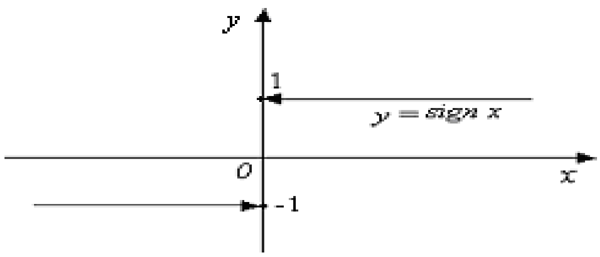
Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limitining ta'rifida x o'zgaruvchi a dan kichik bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_1 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$-0 dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va $b_1=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, yoki $b_1=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, yoki $b_1=f(a-0)$ kabi yoziladi.

Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_1=\lim\limits_{x\to -0} f(x)=f(-0)$ kabi yoziladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_2 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$+0 dagi) **o'ng tomonlama limiti** deb ataladi va $b_2=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ yoki $b_2=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, yoki $b_2=f(a+0)$ kabi yoziladi.

Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_2=\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(+0)$ kabi yoziladi.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. $b_1=b_2$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega.



86-chizma.

Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya'ni $f(a-0)=f(a+0)$ bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & agar \quad x > 0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x = 0 \quad bo'lsa, \\ -1, & agar \quad x < 0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)$=-1, $f(+0)$=1 va $f(-0) \neq f(+0)$ (86-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.

4.Limitlar haqida asosiy teoremalar. Ajoyib limitlar.

Funksiyalarning limitlarini topishga yordam beradigan limitga o'tishning eng sodda qoidalari bilan tanishamiz.

Bunda isbot faqatgina $x \to a$ hol uchun o'tkaziladi ($x \to \infty$ da shunga o'xshash isbotlanadi). Ba'zan qisqalik uchun, $x \to a$ ni ham, $x \to \infty$ ni ham yozmaymiz.

Teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)) = \lim u_1(x)+\lim u_2(x)+...+\lim u_n(x).$$

Isboti. Mulohazani ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun yuritamiz. $\lim u_1(x)=a$, $\lim u_2(x)=b$ bo'lsin. U holda $\lim(u_1(x)+u_2(x))=a+b$ tenglik to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalaridagi 16.5-teoremaning birinchi qismiga asosan $u_1 = a+\alpha,\quad u_2 = b+\beta$ deb yozishimiz mumkin, bu yerdagi α, β- cheksiz kichik funksiyalar.

Demak, $u_1+u_2 = (a+\alpha)+(b+\beta) = (a+b)+(\alpha+\beta)$. Bu tenglikda $a+b$-o'zgarmas son, $\alpha+\beta$-cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremaning ikkinchi qismini qo'llasak $\lim(u_1+u_2) = a+b = \lim u_1 + \lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = \lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}2 = 2+2 = 4$.

2-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^4}-\dfrac{5x^2}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}1 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2} = 1-0 = 1$.

Teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot ...\cdot u_n(x)) = \lim u_1(x)\cdot \lim u_2(x)\cdot ...\cdot \lim u_n(x).$$

Isboti. Ko'paytmada ikkita funksiya bo'lgan holni qaraymiz. $\lim u_1 = a,\ \ \lim u_2 = b$ bo'lsin. U holda yuqorida eslatilgan 16.5-teoremaga binoan $u_1 = a+\alpha,\quad u_2 = b+\beta$ bo'ladi, α, β-cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u_1\cdot u_2 = (a+\alpha)\cdot(b+\beta) = ab + (\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$. Bu tenglikdagi ab-o'zgarmas son, $(\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$- cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremani ikkinchi qismini qo'llasak $\lim u_1\cdot u_2 = ab = \lim u_1 \cdot \lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

3-misol. $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)(x-4) = \lim\limits_{x\to 2}(x+3)\lim\limits_{x\to 2}(x-4) = [\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}3]\cdot[\lim\limits_{x\to 2}x - \lim\limits_{x\to 2}4] =$
$= (2+3)(2-4) = 5\cdot(-2) = -10$.

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right) = (1-0)(2+0) = 2$.

Natija. O'zgarmas C ko'paytuvchini limit belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $\lim C\cdot u(x) = C\lim u(x)$, chunki $\lim C = C$.

5-misol. $\lim\limits_{x\to -1} 7x^2 = 7\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 7\cdot(-1)^2 = 7$.

Teorema. Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\lim v \neq 0$ bo'lsa, $\lim\frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ bo'ladi.

Isboti. $\lim u(x)=a$, $\lim v(x)=b\neq 0$ bo'lsin. U holda $u = a+\alpha$, $v = b+\beta$ bo'lishini hisobga olsak

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ab+\alpha b - ab - a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\frac{a}{b}$ -o'zgarmas son, $\frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$ - cheksiz kichik funksiya, chunki $\alpha b - a\beta$ cheksiz kichik funksiya va $b(b+\beta)\neq 0$.

So'nggi tenglikka 16.5-teoremani 2-qismini qo'llasak $\lim\frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$ tenglik hosil bo'ladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1) = 3\cdot 2+1 = 7\neq 0$. Shuning uchun:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)} = \frac{2\cdot 2+3}{3\cdot 2+1} = \frac{7}{7} = 1.$$

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$ bo'lgani uchun 17.3-teoremani qo'llab bo'lmaydi. Suratning limiti $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 3+1 = 4\neq 0$ bo'lgani uchun berilgan ifodaning teskarisining limitini topamiz: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)} = \frac{3-3}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$.

Bundan $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3} = \infty$ kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Teorema. Agar a nuqtaning biror atrofiga tegishli barcha x lar uchun $y=f(x)\geq 0$ va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (b-chekli son) bo'lsa, u holda $b\geq 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lib b<0 bo'lsin. U holda |*f*(*x*)-*b*|≥|*b*|>0 bo'lishi ravshan. Oxirgi tengsizlik *f*(*x*)-*b* ayirmaning nolga intilmasligini, ya'ni *b* son *f*(*x*) funksiyaning $x\to a$ dagi limiti emasligini ko'rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid, binobarin *b*<0 degan faraz shu ziddiyatga olib keldi. Demak, *f*(*x*)≥ 0 bo'lsa $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash limitga ega $f(x)\leq 0$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq 0$ bo'lishini isbotlash mumkin.

Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti manfiy son bo'laolmas ekan va nomusbat funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti musbat son bo'laolmas ekan.

Teorema. Agar $x\to a$ da limitga ega $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning mos qiymatlari uchun $f_1(x)\geq f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\geq \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $f_1(x)\geq f_2(x)$, bundan $f_1(x)-f_2(x)\geq 0$. Oldingi teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)-f_2(x)]\geq 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)-\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\geq 0$. Bundan $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\geq \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. Bu teoremaga ko'ra tengsizlikda limitga utish mumkin ekan.

Teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar *u*(*x*), *v*(*x*) va *z*(*x*) funksiyalarning mos qiymatlari uchun $u(x)\leq v(x)\leq z(x)$ tengsizliklar bajarilsa va $\lim\limits_{x\to a} u(x)=\lim\limits_{x\to a} z(x)=$b bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} v(x)=$b bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} u(x)=$b va $\lim\limits_{x\to a} z(x)=$b, demak istalgan $\varepsilon>0$ son uchun *a* nuqtaning δ_1-atrofi mavjudki, undagi barcha x lar uchun $|u(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunga o'xshash shu $\varepsilon>0$ son uchun a ning δ_2-atrofi mavjud bo'lib undagi barcha x lar uchun $|z(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar δ orqali δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini belgilasak *a* nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|u(x)-b|<\varepsilon$ va $|z(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bular

$$-\varepsilon<u(x)-b<\varepsilon \text{ va } -\varepsilon<z(x)-b<\varepsilon \qquad (17.1)$$

tengsizliklarga teng kuchli.

Endi teorema shartidagi $u(x)\leq v(x)\leq z(x)$ tengsizliklarni unga teng kuchli $u(x)-b\leq v(x)$-b$\leq z(x)-b$ tengsizliklar bilan almashtiramiz (barchasidan bir xil *b* son ayirildi).

Bunga (17.1) tengsizliklarni qo'llasak $-\varepsilon<u(x)-b\leq v(x)\text{-}b\leq z(x)-b<\varepsilon$ yoki bundan $-\varepsilon<v(x)\text{-}b<\varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib a nuqtaning δ-atrofidagi barcha *x* lar uchun $-\varepsilon<v(x)\text{-}b<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli ekan.

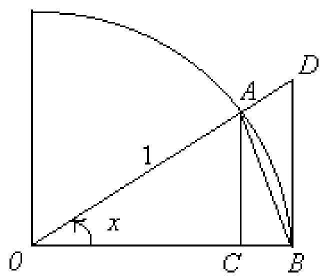
Bu $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b$ ekanini bildiradi.

Bu teoremani hazillashib «Ikki militsioner haqidagi teorema» deb atashadi. Nima uchun shunday deb atalishini o'ylab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz.

8-misol. $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ isbotlansin.

Yechish. Radiusi 1 ga teng aylanani qaraymiz.

87-chizmadan: $x>0$ bo'lsa $\frac{AC}{OA}=\sin x$; $AC=\sin x$, $\breve{AB}=x$ (markaziy burchak o'zi tiralgan yoy bilan o'lchanadi), $AC<\breve{AB}$ yoki $\sin x<x$ ekani ayon bo'ladi. $x<0$ bo'lganda $|\sin x|<|x|$ bo'lishi ravshan.



87-chizma.

Shunday qilib $x>0$ uchun $0<\sin x<x$ va $x<0$ uchun $0<|\sin x|<|x|$ tengsizliklarga ega bo'ldik. $\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x = 0$ ekanligini hisobga olsak 17.6-teoremaga binoan $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

9-misol. $\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 0$ isbotlansin.

Yechish. $0<\left|\sin\frac{x}{2}\right|<|\sin x|$ ekani ravshan. $\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}|\sin x| = 0$ bo'lgani uchun 17.6-teoremaga binoan $\lim_{x\to 0}\left|\sin\frac{x}{2}\right| = 0$ yoki $\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 0$ kelib chiqadi.

10-misol. $\lim_{x\to 0} cosx = 1$ ekanligi isbotlansin.

Yechish. $2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$ yoki $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1-2\cdot 0^2 = 1$$ hosil bo'ladi.

Birinchi ajoyib limit

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o'zi $\frac{0}{0}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Shu funksiyaning $x\to 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

Teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x\to 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isboti. Radiusi 1 ga teng aylana olib AOB markaziy burchakni x bilan belgilaymiz va u $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda yotadi deb faraz qilamiz (87-chizma).

Chizmadan ko'rinib turibdiki,

$\Delta\ AOB$ yuzi<AOB sektor yuzi<$\Delta\ DOB$ yuzi (17.2).

Biroq, $\Delta\ AOB$ yuzi $=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin x=\frac{1}{2}\sin x$ (uchburchakning yuzi ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga teng).

AOB sektor yuzi = $\frac{1}{2}OB^2\cdot \breve{AB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\frac{1}{2}x$,

$\Delta\ DOB$ yuzi $=\frac{1}{2}OB\cdot BD=\frac{1}{2}OB\cdot\frac{BD}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\frac{1}{2}tg\ x$.

Shu sababli (17.2) tengsizliklar $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx$ ko'rinishni yoki $\frac{1}{2}$ ga qisqartirilgandan so'ng $\sin x<x<tgx$ ko'rinishni oladi. Buning barcha hadlarini $sinx$>0 ga bo'lamiz $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. U holda $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{cos\ x}$ yoki $1>\frac{\sin x}{x}>cos\ x$

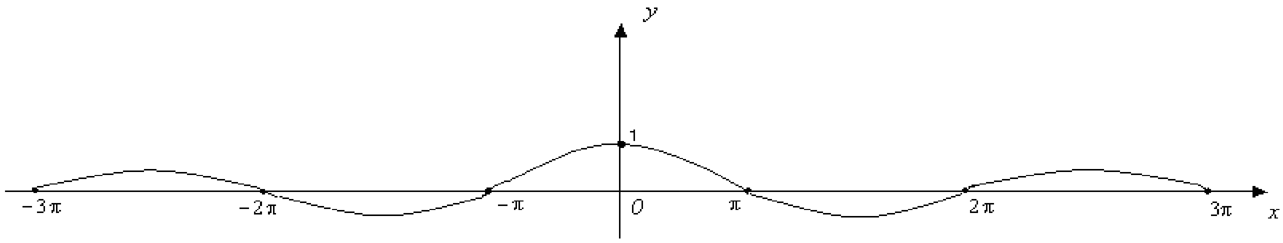
tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklar x>0 deb faraz qilinib chiqarildi. $\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}$, $cos(-x)=cosx$ ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizliklar x<0 bo'lganda ham to'g'ri degan xulosaga kelamiz. Ammo $\lim\limits_{x\to 0}1=1$ va $\lim\limits_{x\to 0}cosx=1$.

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya orasidaki, ularning ikkalasi ham bir xil 1 ga teng limitga intiladi. Shuning uchun oraliq funksiyaning limiti haqidagi 16.6-teoremaga binoan oraliqdagi $\frac{\sin x}{x}$ funksiya ham ana shu 1 limitga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$=1. $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning grafigi 88-chizmada tasvirlangan.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

12-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}m\cdot\frac{\sin mx}{mx}=m\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m\cdot 1=m$ (m-o'zgarmas son).

13-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{x}}=\frac{\alpha}{\beta}.$



88-chizma.

Ikkinchi ajoyib limit

Ushbu $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda *n*-natural son.

Teorema. Umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Isboti. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}b^n$$

dan foydalanib ketma-ketlikni x_n va x_{n+1} hadlarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+ \qquad (17.4)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

x_n bilan x_{n+1} ni taqqoslasak, x_{n+1} had x_n haddan bitta musbat qo'shiluvchiga ortiqligini ko'ramiz. $1-\frac{k}{n+1}>1-\frac{k}{n}$ $(k=1,2,3\ldots,n-1)$ bo'lgani uchun uchinchi haddan boshlab x_{n+1} dagi har bir qo'shiluvchi x_n dagi unga mos qo'shiluvchidan katta. Demak, istalgan *n* uchun $x_{n+1}>x_n$ va umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi.

Endi berilgan ketma-ketlikni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Istalgan k=1,2,3,… uchun $1-\frac{k}{n}<1$ ekanini hisobga olib (17.4) formuladan

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

So'ngra $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$

ekanligini ta'kidlab tengsizlikni

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)$$

ko'rinishda yozamiz. Qavsga olingan yig'indi birinchi hadi a=1 va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini ifodalanganligi uchun cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini topish formulasi $S=\frac{a}{1-q}$ ga asosan

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lganligi sababli uning birinchi hadi $x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$ uning qolgan barcha hadlaridan kichik bo'ladi.

Demak, barcha n uchun $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ o'rinli, ya'ni umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan. Shu sababli u monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi 16.1-teoremaga ko'ra chekli limitga ega. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e-irratsional son. Keyinroq uni istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash usuli ko'rsatiladi. $e=2{,}7182818284...$

Teorema. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x\to\infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (17.5).$$

Isboti. 1) $x \to \infty$ deylik. U holda $n \le x < n+1$; $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$,

$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ bo'ladi. Agar $x \to +\infty$, u holda $n \to \infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ yoki

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$e\cdot 1 \ge \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge e\cdot 1$ bundan $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ kelib chiqadi.

2) $x \to -\infty$ deylik. Yangi t=-(x+1) yoki x=-(t+1) o'zgaruvchini kiritamiz. $t \to +\infty$ da $x \to -\infty$ va

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ ekanini isbotladik. Bu limit **ikkinchi ajoyib limit** deb yuritiladi.

Agar bu tenglikda $\frac{1}{x} = \alpha$ deb faraz qilinsa, u holda $x \to \infty$ da $\alpha \to 0$ $(\alpha \ne 0)$ va

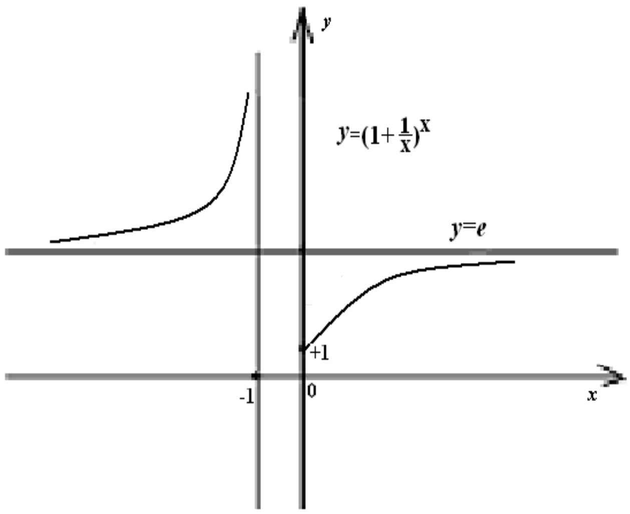
$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi ajoyib limitning yana bir ko'rinishi.

$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funksiyaning grafigi 89-chizmada tasvirlangan.

Chizmadan ko'inib turibdiki bu funksiya (-1,0) intervalda aniqlanmagan, ya'ni $1+\frac{1}{x}<0$, chunki $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$ va $x+1>0,\ x<0$.

Izoh. Asosi e bo'lgan $y=e^x$ ko'ursatkichli funksiya eksponental funksiya deb ataladi. Bu funksiya mexanikada(tebranishlar nazariyasida),



89-chizma.

elektrotexnikada va radiotexnikada, radioximiyada va hokazolarda turli hodisalarni o'rganishda katta rol o'ynaydi.

Izoh. Asosi $e=2{,}7182818284...$sondan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Neper logarifmlari deb ataladi va $\ell og_e x$ o'rniga $\ell n\, x$ deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o'tish formulasi $\ell og_a b=\frac{\ell og_c b}{\ell og_c a}$ dan foydalanib o'nli va natural logarifmlar orasida bog'lanish o'rnatish mumkin:

$$\ell g\, x=\frac{\ell n\, x}{\ell n 10}=\frac{1}{\ell n 10}\ell n\, x=0{,}434294\ \ell n\, x \quad \text{yoki} \quad \ell n\, x=\ell n 10\ \ell g\, x=2{,}302585\,\ell g\, x\,.$$

14-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+8}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8}=e(1+0)^8=e\,.$

15-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ topilsin.

Yechish. $x=3t$ desak, $x\to\infty$ da $t\to\infty$ va

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\cdot e\cdot e=e^3 \qquad \text{bo'ladi.}$$

16-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+3}{x+1}\right)^{x+1+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{(x+1)+1}=$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{1}=e^3\cdot 1=e^3.$$

Ikkinchi ajoyib limit 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik ekanini ta'kidlab o'tamiz.

Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

$\alpha=\alpha(x)$ va $\beta=\beta(x)$ funksiya $x\to a$ (yoki $x\to\infty$) da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin. Bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rdik. Ularning nisbati, ya'ni bo'linmasi haqida gapirilmagan edi. Ikkita cheksiz kichik funksiyalarni ularning nisbatlarini limitiga qarab taqqoslanadi.

1-ta'rif. Agar $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$ (yoki $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$) bo'lsa, α funksiya β funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan $x\to 0$ da $\alpha=\sin^2 x$ funksiya $\beta=x$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\sin x=1\cdot 0=0.$

2-ta'rif. Agar $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ bo'lsa, α va β funksiyalar bir xil tartibli **cheksiz kichik funksiyalar** deyiladi.

Masalan $x\to 0$ da $\alpha=\sin 3x$ va $\beta=x$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalardir, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\neq 0.$

3-ta'rif. Agar $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$ bo'lsa, α va β cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deb ataladi va $\alpha\sim\beta$ yoki $\alpha\approx\beta$ kabi yoziladi.

Masalan, $x\to 0$ da *sinx~x,* chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ va $x\to 0$ da *tgx~x,* chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1.$

Amaliyotda qo'yidagi teoremadan ko'p foydalaniladi.

Teorema. Agar $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$ bo'lsa, $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ tenglik to'g'ridir.

Haqiqatan $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\lim\frac{\beta_1}{\beta}=1\cdot\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot 1=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$

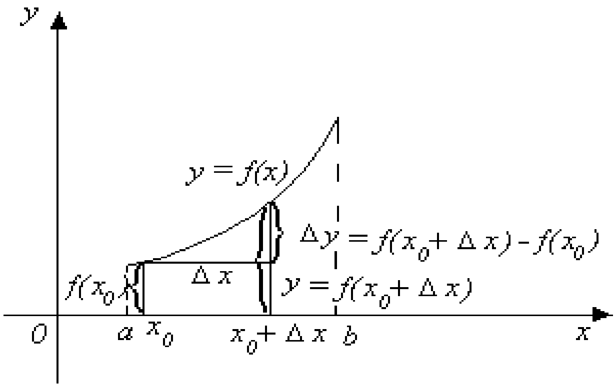
17-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5.$

18-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$

5. Funksiyaning uzluksizligi

Argument va funksiyaning orttirmalari

$y = f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz, unga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi (90-chizma).
$(a;\, b)$ intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi. $f(x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning argument orttirmasi Δx ga mos orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Bundan $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 90-chizmada $(a;\, b)$ intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko'rinib turibdiki argumentning kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham kichik Δy orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir-biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to'g'ri kelavermaydi. Masalan, $y = \frac{1}{x}$ funksiyani qaraylik. x ning bir-biriga ancha yaqin $x_1 = -10^{-6}$ va $x_2 = 10^{6}$ qiymatlariga funksiyani bir-biridan katta farq qiladigan $y_1 = -10^{6}$ va $y_2 = 10^{6}$ qiymatlari mos keladi. Boshqacha aytganda argumentning juda kichik $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ orttirmasiga funksiyaning ancha katta $\Delta y = y_2 - y_1 = 2 \cdot 10^{6}$ orttirmasi mos keladi. Agar biz $y = \frac{1}{x}$ funksiyani grafigini (91-chizma) kuzatsak grafikning uzilishga ega (u ikki bo'lakdan iborat) ekanligini va uzilish x ning x=0 qiymatida sodir



90-chizma.

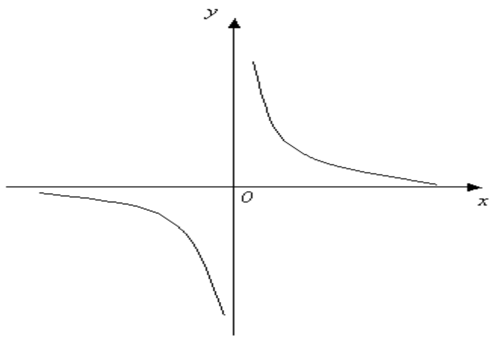
bo'lishini ko'ramiz. Shuning uchun ham argumentning x_0 =0 nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funksiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi. Bu kabi hollar barcha funksiyalar sinfini ikkiga, ya'ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funksiyalar sinfiga bo'lib o'rganishni taqozo etadi.

Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, (18.1) ya‘ni funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo’lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Bu ta‘rifga teng kuchli yana bir ta‘rifni keltiramiz.



91-chizma.

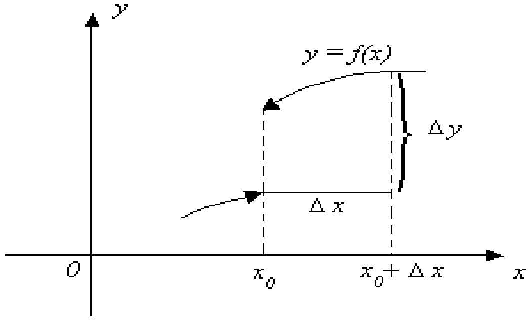
2-ta‘rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo’lsaki, $|x - x_0| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

3-ta‘rif. $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (18.2)$$

bo’lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

90-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, chunki (18.2) shart bajariladi.

92-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y \neq 0$.



92-chizma.

1-misol. $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko’rsating. **Yechish.** Bu funksiya butun sonlar o’qida aniqlangan. Δy ni tuzamiz: $f(x) = x^2$; $f(x_0) = {x_0}^2$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 0$ va $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol. $y = \sin x$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko’rsating.

Yechish. $f(x) = \sin x$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_0+\Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0+\Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = 2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = 0,$$

chunki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$.

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to'g'riligiga iqror bo'lamiz.

18.1-teorema. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$ shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta'rifga qaytib uni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ ko'rinishda yozamiz. Bundan ko'rinib turibdiki x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo'lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan.

3-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ell n(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ell n(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ell n\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ell ne = 1.$

Bu yerda $\ell n x$ funksiyani $x=e$ nuqtada uzluksizligidan foydalanib limitni funksiya ishorasi ℓn ning ichkarisiga kiritdik.

5-ta'rif. $(a;b)$ intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz $f(x)$ funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada **o'ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lib $x=a$ nuqtada o'ngdan va $x=b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a;b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

5-va 6-ta'riflarga hamda 18.1 teoremaga asoslanib $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar butun sonlar o'qida, $y = \ell og_a x$ funksiya $(0; +\infty)$ intervalda, $y = \sqrt{x}$ funksiya $[0; +\infty)$ intervalda, $y = \dfrac{1}{x}$ funksiya $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ intervalda uzluksiz ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Shuningdek ko'phad butun sonlar o'qida, kasr-ratsional funksiya x ning kasr maxrajini nolga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida uzluksiz ekanini eslatib o'tamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va $g(x_0) \neq 0$ bo'lganda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bo'linmasi ham shu x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalariga asoslangan.

Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz.
Nuqtada uzluksiz funksiya xossalarini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

Teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$ ekanligini ko'rsatamiz. $u = \varphi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $x \to x_0$ да $u \to u_0$. $f(u)$ funksiyaning shu nuqtada uzluksizligini hisobga olsak

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)].$$

Shunday qilib ikkita uzluksiz $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalardan tashkil topgan $y = f[\varphi(x)]$ funksiya ham uzluksiz bo'lar ekan. Masalan, $y = \ell n(4 - x^2)$ murakkab funksiya x ning $4 - x^2 > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $(-2; 2)$ intervalda uzluksiz.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyani uzluksizligi haqidagi teoremalarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi qo'yidagi teoremaga ega bo'lamiz.

Teorema. Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

4-misol. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}$ topilsin.

Yechish. $4^{s\ \ xi}$ murakkab funksiya $x = \dfrac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x} = 4^{\sin\frac{\pi}{2}} = 4^1 = 4$ bo'ladi.

5-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $a^x-1=t$ almashtirish olamiz. U holda $a^x=1+t$, $x=\ell og_a(1+t)$ bo'lib $x\to 0$ da $t\to 0$ va

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ell og_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ell og_a(1+t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ell og_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ell og_a e}=\ell og_e a=\ell na \qquad \text{bo'ladi.}$$

Xususiy holda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ell ne=1$ kelib chiqadi, ya'ni $x\to 0$ da $e^x-1\sim x$.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $(1+x)^p-1=y$ almashtirish olamiz. U holda $(1+x)^p=1+y$, yoki buni e asosga ko'ra logarifmlasak $p\ell n(1+x)=\ell n(1+y)$ bo'ladi. $x\to 0$ da $y\to 0$. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\ell n(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ell n(1+y)}=p\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ell n(1+y)}=p\cdot 1\cdot 1=p.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p$ formulaga ega bo'ldik.

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiriladi.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x=a$ nuqtada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

3) $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$ bo'ladi.

4) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$ bo'ladi.

5) $\alpha>0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$, $\alpha<0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$ bo'ladi;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\ell nx=-\infty$.

6') $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell og_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\ell og_a x=-\infty$.

7) $0 < a < 1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell og_a x = +\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tgx = -\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$.

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

12) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \ell n a$.

12') $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$.

14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ell og_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ell n a}$.

14') $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ell n(1+x)}{x} = 1$.

Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

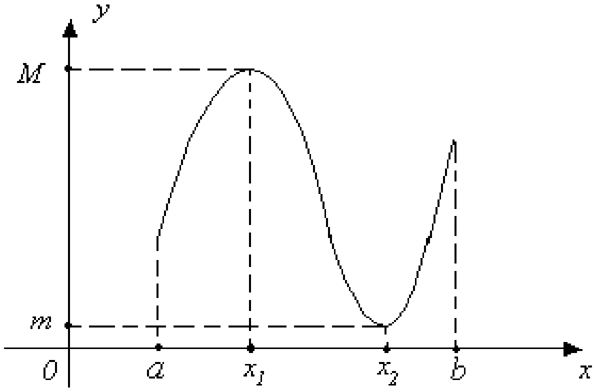
Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $[a;\, b]$ kesmada shunday $x_1,\ x_2$ nuqtalar mavjud bo'lib $[a;\, b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar to'g'ri bo'ladi (94-chizma).

$m = f(x_2)$ va $M = f(x_1)$ $y = f(x)$ funksiyaning $[a;\, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.

Masalan, $(0;\ 1)$ intervalda uzluksiz $y = x$ funksiya bu intervalda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.

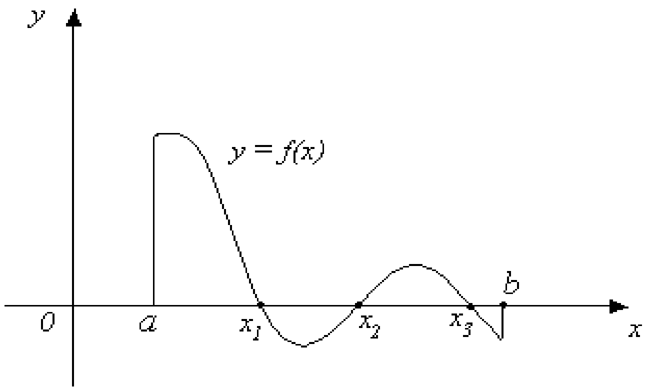


94-chizma.

Natija. $[a;\, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangandir.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m orqali belgilasak $[a;\, b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $m \le f(x) \le M$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar C orqali $|m|$ va $|M|$ dan kattasini belgilasak $|f(x)| \le C$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada chegaralanganligini ko'rsatadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a;\, b)$ intervalda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi.

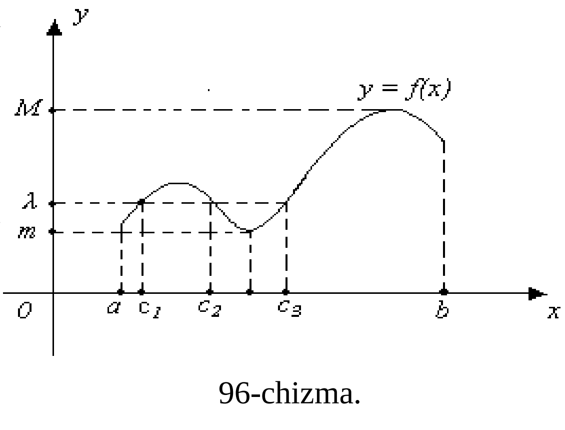


95-chizma.

95-chizmada $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ va x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiyaning grafigi $0x$ o'qni kesib o'tadi, demak, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$.

Teorema. $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib m va M uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin, u holda funksiya shu kesmada m bilan M orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $m < \lambda < M$ shartni qanoatlantiradigan istalgan λ son uchun $[a;\, b]$ kesmada kamida bitta $x = c$ nuqta mavjud bo'lib, $f(c) = \lambda$ tenglik to'g'ri bo'ladi(96-hizma).

Izoh. Funksiya $[a;\, b]$ kesmaning birorta nuqtasida uzilishga ega bo'lganda 18.6- va 18.7- teoremalar bajarilmasligi mumkin. Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ bajarilsada y $[-1;\, 1]$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga



96-chizma.

aylanmaydi. Buning sababi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya $[-1;\, 1]$ kesmadagi $x = 0$ nuqtada uzilishga ega (91-chizma).