O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK-IQTISODIYOT INSTITUTI

“OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

Mavzu: **Funksiyaning limiti va uzluksizligi**

REFERAT

Bajardi: **“TMJ-119-15” guruh talabasi Tojiyev Eldor**

Qabul qildi: **Ibragimov Suhrob**

Qarshi 2015

FUNKSIYA.

REJA:

1. Funksiya haqida tushuncha va uning ta'rifi.
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.
4. Juft va toq funksiyalar.
5. Davriy funksiyalar.
6. Monoton funksiyalar.

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to'rtburchak berilgan bo'lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba'zilari o'zgarmaydi, ba'zilari o'zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to'rtburchaklarda burchaklarining to'g'riligi, ularning soni to'rtta bo'lishligi va yig'indisi 360° ga tengligi o'zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o'zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o'z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo'lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o'zgarib turadi.

Ma'lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma'lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar dyiladi. Odatda o'zgarmas miqdorlarni *a, b, c, d, ...,* o'zgaruvchi miqdorlarni *x, y, z, u, v,* . . . harflari bilan belgilaydilar.

Matematikada ko'pincha o'zaro bir-biriga bog'liq ravishda o'zgaradigan miqdorlar bilan ish ko'riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o'zgarishiga qarab o'zgaradi, ya'ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog'lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Ta'rif **:** Agar x miqdorning X sohadagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko'ra y miqdorning Y-sohadan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X-sohadagi funksiyasi deyiladi va $y=f(x)$ kabi yoziladi.

Bu holda x - argument yoki erkli o'zgaruvchi, y - esa funksiya yoki erksiz o'zgaruvchi deyiladi. Agar y x ning funksiyasi bo'lsa, u holda x va y lar orasidagi bog’lanish funksiyali bog’lanish deyiladi va quyidagicha yoziladi: $y=f(x)$, $y=q(x)$, $y=\varphi(x)$ va hokazo. Agar yuqoridagi misollarga e’tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

Argument qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari to’plami funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o’zi qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari to’plami funksiyaning o’zgarish sohasi yoki qiymatlari to’plami deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma’lum tartibdagi x_1, x_2, x_3,… x_n,… qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi y_1, y_2, y_3, … ,y_n, … qiymatlari jadval holida beriladi:

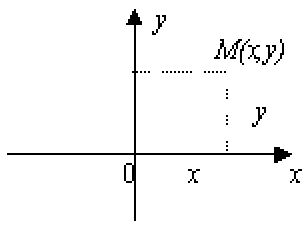
X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n	…

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko’rsatish mumkin. Bu usuldan ko’pincha miqdorlar orasida tajribalar o’tkazishda foydalaniladi.

To’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma’lumki, sonlar o’qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o’zaro perpendikulyar bo’lgan OX va OY sonlar o’qini chizamiz. Gorizontal holda tasvirlangan sonlar o’qi ordinatalar o’qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To’g’ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo’lsin. Shu nuqtadan koordinata o’qlariga perpendikulyarlarning absissalar o’qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, koordinatalar o’qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va $M(x,y)$ tartibida yoziladi. (1-chizma).



Demak, to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma'lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinatalari $y=f(x)$ ni to'g'ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo'lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi.

Endi savol tug'iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun egri Ou o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chizamiz, agar bu to'g'ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyani ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. Formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y=x^2$, $y=kx+b$, $y=a^x$, $y=lgx$, $y=sinx$, $y=tgx$, $y=2x^3-x+4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to'g'risida alohida shart qo'yilmagan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ da o'ng tomonda turuvchi ifoda ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y=x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzi ifodalovchi bog'lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko'raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y=\frac{3}{x}$. Echimi. Ma'lumki, kasr ma'noga ega bo'lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo'lishi kerak. Demak, $x\neq 0$ yoki $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. $y=\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$. *Yechimi.* Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1\neq 0$ yoki $2x\neq 1$, $x\neq\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

3. $y=\sqrt{3x+2}$ Echimi. Kvadrat ildiz ma'noga ega bo'lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni 3x+2≥0, bunda $x \geq -\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ dan iborat.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$ Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda 4x-5>0 bo'ladi. Bundan $x>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4}, +\infty)$ dan iborat.

5. $y=\lg(2x-1)$ Echimi. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, (2x-1)>0 bo'lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2}, +\infty)$ dan iborat.

6. $y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$. Echimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak,2x-1>0, 2x-1≠1 bo'ladi. Bundan $x>\frac{1}{2}$, x≠1 kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2}; +1)\cup(1; +\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o'rganish jarayonida juda ko'p uchraydigan usuldir, lekin ba'zi xollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) *y=f(x)* yozuv hali funksiyaning analitik usulda berilishi bo'lmasligi mumkin. Masalan, ushbu Dirixle funksiyasini olaylik:

$$y=\begin{cases} 1, & агар \quad x - рационал \quad сон \quad булса \\ 0, & агар \quad x - иррационал \quad сон \quad булса. \end{cases}$$

Demak *y=f(x)* funksiya berilgan, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, ammo funksiyaning analitik ifodasi berilgan emas:

V) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo'ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to'plam bo'lganda, uning barcha qiymatlarini ko'rsatib bo'lmaydi:

G) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o'zgartirishlarini ko'rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (hususiy holda to'gri chiziq), ba'zi hollarda biror nuqtalar to'plami bo'ladi.

4. Funksiya grafigini chizish. *y=f(x)* funksiyaning grafigini hosil qilish uchun *M(x,f(x))* nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo'lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq 0$ haqiqiy sonlar to'plami, ya'ni $]-\infty, 0[U]\ 0, +\infty[$ dan iborat.

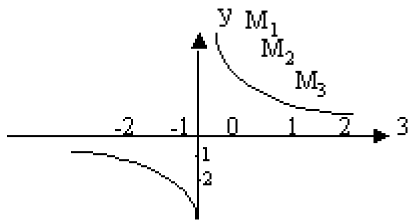
Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	…
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	…

Koordinata tekisligida $M_1(1;1),\ M_2(2;\frac{1}{2}),\ M_3(3;\frac{1}{3}),....$

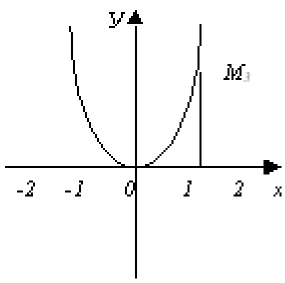
nuqtalarni hosil qilamiz. Bir biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo'ladi.

(2-chizma)

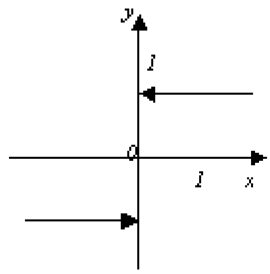


2-chizma.

2) $y=x^2$ ning grafigi chizilsin.



3-чизма.



4-чизма.

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	…
$y=x^2$	0	1	4	9	1	4	9	…

$M_1(0;\,0),\quad M_2(1;\,1),\quad M_3(2;\,4),....$ nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri yaizig'i hosil bo'ladi.(3-chizma)

3) 4-chizmada

$$y=\begin{cases}1, & агар\quad x>0\quad булса,\\ 0, & агар\quad x=0\quad булса,\\ -1, & агар\quad x<0\quad булса.\end{cases}$$

funksiyaning grafigi ko'rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo'lib, abssissalar o'qiga tik bo'lgan har qanday to'gri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko'p bo'lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funksiyani ifoda qiladi.

3. **Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.**

1. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli B sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\leq B$ bo'lsa, *f(x) yuqoridan chegaralangan* funksiya deyiladi.

2. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli A sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\geq A$ bo'lsa, *f(x) quyidan chegaralangan* deyiladi.

M i s o l l a r .1. $y=x^2-4x+6$ funksiya $-\infty<x<+\infty$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u quyidan chegaralangan. Haqiqatdan ham, $y=(x-2)^2+2$ Demak, $y\geq 2$ ya'ni funksiyaning eng katta qiymati yo'q. Eng kichik qiymati 2.

2. $Y=-3x^2+4x+1$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Haqiqatdan ham,

$$y=-3x^2+4x+1=-3(x^2-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{1}{3})=-3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3},$$

ya'ni funksiyaning eng katta qiymati bor. Eng kichik qiymati yo'q. Demak, $y\leq -\frac{7}{3}$

.

Agar $y=f(x)$ funksiya yuqoridan ham, quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni $A\leq f(x)\leq B$ bo'lsa, bunday funksiyaga *chegaralangan* funksiya deyiladi.

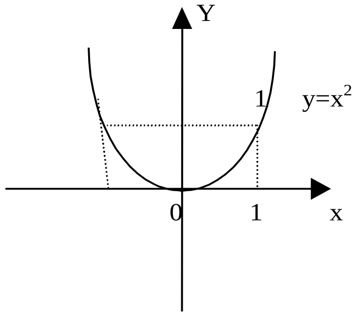
Masalan, $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar chegaralangandir, chunki $-1\leq \sin x\leq 1$ va $-1\leq \cos\leq 1$ shartlari bajariladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $A\leq f(x)$ yoki $f(x)\leq B$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan A yoki B sonlari mavjud bo'lmasa, u holda bunday funksiya *chegaralanmagan* funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, lekin chegaralanmagan funksiyadir, ya'ni $-\infty<y<+\infty$. $f(x)\geq a$ bo'lsa, funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x uchun grafikning barcha nuqtalari $y=a$ to'g'ri chiziqdan (2-chizma) yuqorida joylashgan bo'ladi.

4.Juft va toq funksiyalar.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o'zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya juft funksiyadir. Haqiqatdan, bu funksiya $\boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan va demak, aniqlanish sohasi har qanday x bilan $-x$ ni o'z ichiga oladi. Bundan tashqari, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ tenglik bajariladi. Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (7-chizma).



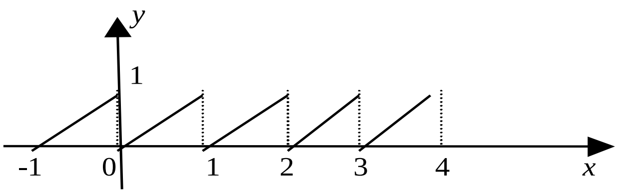
7-chizma

$y=\cos\alpha$ juft funksiyadir. Haqiqatdan ham, har qanday α va $-\alpha$ uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan (9-chizma). Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekani kelib chiqadi. Bu kosinus ta'rifiga ko'ra, har qanday α da quyidagi tenglik to'g'ri ekanini bildiradi: $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *toq funksiya* deyiladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya'ni $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, kubik paraboladan iboratdir (9- chizma). $y=\sin x$ toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, chizmada P_α va $R_{-\alpha}$ nuqtalarning ordinatalari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshiligidan $\sin\alpha=y_\alpha$, $\sin(-\alpha)=-y_\alpha$ bo'ladi. Bundan esa $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ bo'ladi. Har qanday funksiya ham juft yoki toq bo'lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5, y=x^2+x^3$, $y=\sin x+\cos x$ juft ham, toq ham emas. Demak funksiyalar har doim juft yoki toq bo'lishi shart emas ekan.

5. Davriy funksiyalar.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+t$ va $x-t$ lar aniqlanish sohasiga joylashgan bo'lib, $f(x+t)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ *davriy funksiya* deb ataladi. t sonlarni eng kichigi funksiyaning *davri* deyiladi.



8-chizma

Misol. y=sinx , y=cosx, y=tgx,y=x-[x] davriy funksiyalardir.

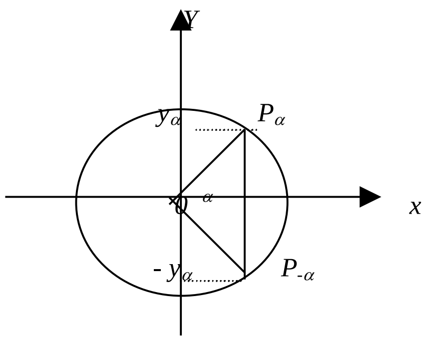
Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so'ngra uni chapga va o'ngga cheksiz ko'p marta ko'chirish kerak.

Misol. $f(x)=x-[x]=x - E(x)$ funksiya berilgan. Bunda $E(x)=[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi. (E – fransuzcha Entier -ante-butun so'zining birinchi harfi). Masalan, $[x]=m$ $(m\leq x<m+1)$ m butun son.

$f(x)=x-E(x)=\{x\}$. Bu funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya'ni $f(1)=0;$ $f(1,05)=0,05;\ldots$, $f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $t=1$ dir. Haqiqatdan,

$$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x).$$

Demak, har qanday butun son ham davr bo'ladi. Funksiyaning grafigi 8-chizmada ko'rsatilgan.

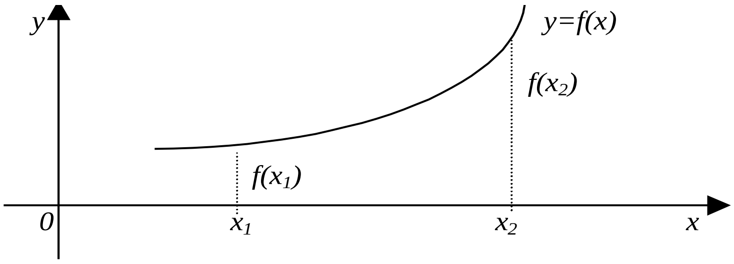


9-chizma

6. Monoton funksiyalar.

Ta'rif-1: $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ihtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ *funksiyasi X* ***sohada o'suvchi*** funksiya deyiladi.

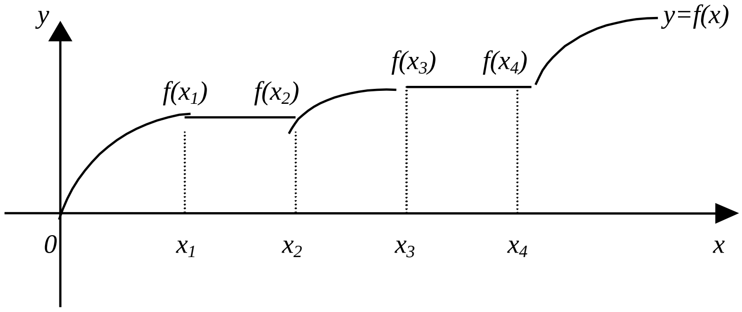
Yuqorida, aytib o'tilgan ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ko'rsatishimiz mumkin.



Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, funksiya biror oraliqda o'suvchi bo'lishi uchun shu oraliqdagi argumentning kichik qiymatiga funksiyaning kichik qiymati, argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelar ekan.

1) $y=2^x$ funksiyasi butun son o'qida o'suvchi.
2) $y=tgx$ funksiya ham o'suvchi funksiyadir.

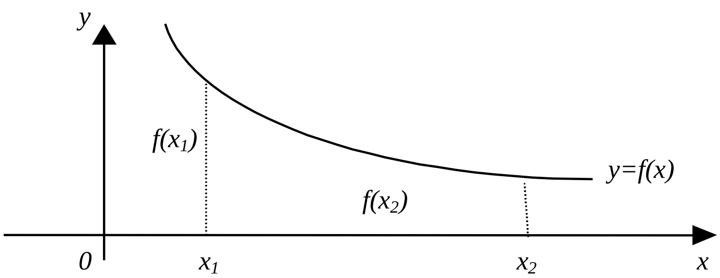
<u>Ta'rif-1:</u> $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1\le x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1,x_2) oralig'ida *kamaymaydigan* funksiya deyiladi.



<u>Ta'rif-2:</u> $y=f(x)$ ning argumenti X ni $\forall(x_1,x_2)$ uchun $x_1<x_2$, bo'lganda $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ ni (x_1,x_2) oralig'ida kamayuvchi funksiya deyiladi.

1-Misol: $y=x^2$ funksiyaning olsak, bu funksiya $(-\infty,0)$ oralig'ida kamayuvchi, $(0,\infty)$ oralig'ida o'suvchi funksiyadir.

2-Misol: $y=sinx$ funksiya $(0,\frac{\pi}{2})$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib, $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ oraliqda monoton kamayuvchidir.



<u>Ta'rif:</u> *$y=f(x)$* ning argumentining ixtiyoriy (x_1, x_2) qiymatlari uchun $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1, x_2) oralig'ida *o'smaydigan* funksiya deyiladi.

Agar berilgan oraliqda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya'ni shu oraliqdagi ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun $x_2 > x_1$ shartdan $f(x_2) > f(x_1)$ kelib chiqsa, $y=f(x)$ funksiya shu oraliqda *o'suvchi* deyiladi.

<u>Ta'rif-3:</u> Biror (x_1, x_2) oralig'ida o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

f.m.f.n, dotsent	*D. Otaqo'ziboyev*
professor	*R. Ibragimov*
f.m.f.n, dotsent	*A. Mashrabboyev*
f.m.f.n, katta o'qituvchi	*N. Xatamov*
professor	*R. Ibragimov*
	R. Polvanov.