Олий математика

Режа:

1. Математик статистиканин вазифаси.

2. Асосий тушунчалар.

3. Статистик тақсимот. Полигон ва гистограмма.

4. Эмпирик тақсимот функция.

1. Математик статистиканинг вазифаси

Оммавий (ялпи) тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қону-ниятларни аниқлаш, статистик маълумотларни – кузатиш натижа-ларини ўрганишга асосланади. Математик статистиканинг вазифаси - статистик маълумотларни тўплаш ва уларни таҳлил қилиш усулларини тадқиқот масалаларига мувофиқ ишлаб чиқаришдан иборатдир.

2. Асосий тушунчалар.

Бир жинсли объектлар тўпламини бирор белгига нисбатан ўрганиш талаб қилинсин. Масалан, маълум турдаги маҳсулотлар партияси стандартликка текширилаётган бўлсин. Бунинг учун ялпи текшириш ўтказиш мумкин. Лекин объектлар сони жуда катта бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш жисмонан мумкин эмас. Бордию ўрганиш объектларнинг яроқсизланиши ёки катта миқдорда маблағ сарфланиши билан боғлиқ бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказишнинг маъноси ҳам бўлмайди. Шу сабабли бизни қизиқтираетган белгини ўрганиш учун *танланма усули* қўлланилади.Бу усулнинг маъноси шундан иборатки тўпламнинг барча объектлари текширилмасдан, балки ундан тасодифий равишда олинган қисмигина текширилади; шу қисми устида чиқарилган хулосалар барча объектлар тўпламига тадбиқ қилинади.

Танланма усули билан боғлиқ бўлган асосий таъриф ва тушунчаларни киритамиз.

Œрганишимиз лозим бўлган барча бир жинсли объектлар тўплами *бош тўплам* дейилади.

Бош тўпламдан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўплами *танланма тўплам* ёки *танланма* дейилади.

Бош ёки танланма тўпламдаги объектлар сони шу тўпламнинг *ҳажми* дейилади. Масалан ,1000 та тайерланган деталдан текшириш учун 100 таси танланган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми N=1000, танланма тўплам ҳажми эса $n=100$ бўлади.

Танланма *такрорий* (текширилган объект бош тўпламга қайтарилади) ва *нотакрорий* (текширилган объект бош тўпламга қайтарилмайди) бўлади.

Амалда кўпинча нотакрорий танланмадан фойдаланилади. Албатта бу иккала танлаб олиш усулида ҳам танланма тўплам бош тўпламнинг барча хусусиятларини сақлаган ҳолда олиниши керак,, яъни танланма тўплам бош тўпламга’*’ўхшаш”*бўлишини таъминлайдиган қилиб танлаш лозим. Бундай танланма *репрезентатив* (ваколатли) танланма дейилади. Агар танланиш тасодифий равишда амалга оширилса репрезентатив бўлади.

Танланма тўпламни бирор белгига нисбатан ўрганиш учун тажрибалар(кузатишлар) ўтказилади.

Бир хил шароитда, боглиқ бўлмаган ҳолда ўтказилган тажриба-
лар натижасида қуйидаги сон қийматлар олинган бўлсин:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(N)}$$

бу ерда n-танланма ҳажми. Уларни ортиб бориш тартибида жойлаштирсак ҳосил бўлган

$$x_1, x_2, ..., x_n \quad (x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n) \qquad (1)$$

қатор *вариацион қатор* дейилади, x_i *(i=1,2,...n)* ларни эса *вариан-
талар* дейилади.

Умуман, (1) да баъзи варианталар бир-бирига тенг бўлиши, яъни
бир хил қийматли варианталар такрорланиши мумкин.

Айтайлик, x_1 варианта n_1 марта, x_2 варианта n_2 марта ,..., x_K варианта $n_л$ марта такрорланиши ва шу билан бирга

$$n_1 + n_2 + ... + n_л = n$$

бўлсин. У ҳолда дискрет вариацион қатор ушбу

$$\begin{matrix} x_1, x_2, ... x_K, \\ n_1, n_{2,..} ... n_л \end{matrix}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда n_i *(i=1,2,...k*) сонлар- *частоталар,-*

$$\frac{n_i}{n} = \omega_i \quad (i=1,2,..k)$$

сонлар *нисбий частоталар* дейилади.

Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{л} \omega_i = 1$$

яъни варианталар нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг.

3. Статистик тақсимот. Полигон ва гистограмма.

Танламанинг *статистик тақсимоти* деб варианталар ва уларга мос частоталар (ёки нисбий частоталар) орасидаги мосликка айтилади.

Статистик тақсимот масалан варианталар ва уларга мос частоталар кўрсатилган жадвал ёрдамида берилиши мумкин.

x_I	x_1	x_2	x_3	..	x_{K-1}	x_K
n_i	n_1	n_2	n_3	..	$n_{л-1}$	$n_л$

Мисол. Ҳажми $n=60$ бўлган танланманинг частоталар тақсимоти берилган:

x_I	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Нисбий частоталар тақсимотини топинг.

Ечиш:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}$$

формулани қўллаб нисбий частоталарни ҳисоблаймиз:

$\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, $\omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$, $\omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$, $\omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

$\omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ $\omega_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{12}{60} = \frac{1}{12}$

Шундай қилиб, нисбий частоталар тақсимоти ушбу:

x_I	4	10	16	20	24	30
ω_I	$1/4$	$3/10$	$1/10$	$1/15$	$1/12$	$1/5$

жадвал билан билан аниқланади.

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = 1$$

бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

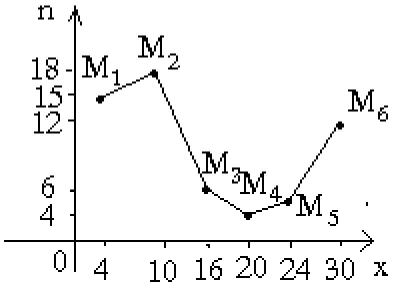
Кўргазмалилик мақсадида статистик тақсимот график кўри- нишда тасвирланади. Агар статистик тақсимот x_I. варианталар ва уларга мос n_i частоталар рўйхати билан берилган бўлса, у ҳолда абсциссалар ўқига x_I варианталар ординаталар ўқига эса n_i частоталар қўйиб чиқилиб

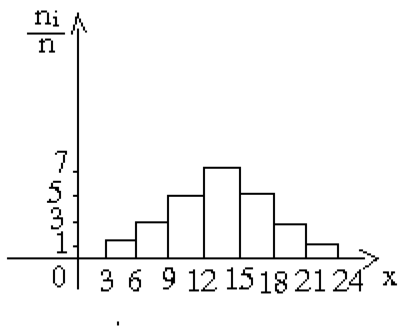
$$\text{M}(x_1, n_1), .., \text{M}(x_K, n_л)$$

нуқталар ясалади. Сўнг улар кетма-кет тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилади, ҳосил бўлган синиқ чизиқ *частоталар полигони* дейилади. Худди шундай нисбий частоталар полигони қурилади, яъни

$$\text{M}(x_1, \omega_1), .., \text{M}(x_K, \omega_K)$$

нуқталарни (бу ерда $\omega_i = \frac{n_i}{n}$) тўғри чизиқ кесмалари билан кетма-кет туташтирадиган синиқ чизиқ ясалади. Мисолда кўрсатилган тақсимотнинг нисбий частоталар полигони 1-расмда тасвирланган.





1-расм 2-расм

Дискрет вариацион қатордан бошқа яна интервалли қатор қаралади, уларда белгиниг қийматлари узлуксиз ўзгариши мумкин.. Мос интерваллардаги ихтиёрий қийматларни қабул қиладиган узлуксиз тасодифий миқдорларга мисол қилиб, бирор дон экин ҳосилининг вазнини ва бошқаларни олиш мумкин.

X узлуксиз тасодифий микдорни ўлчаш натижаларига эга бўлайлик. Унинг энг катта ва энг кичик қийматлари мос равишда a ва b бўлсин. $[a,b]$ кесмани k та $[x_{i-1}, x_i)$ *(i=1,2,..,k)(* $x_0 = a, x_л = b$ *)* кесмаларга бўламиз. n_i орқали X миқдорнинг $[x_{i-1}, x_i]$ интервалга тушган қийматларини белгилаймиз ва 1-жадвални тузамиз. Бу жадвал интервалли вариацион қатор дейилади. *i*-интервалга мос нисбий частота деб n_i частотанинг танланма хажми n нисбатига айтилади, бу ерда

$$n_1 + n_2 + ... + n_л = n$$

Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{n} = 1$$

$x_{11}-x_0,...,x_K-x_{л-1}$айирмалар- *жадвал айирмалар* дейилади. *X* белгининг энг катта ва энг кичик қийматлари айирмаси, яъни $x_л - x_0$ (ёки *b-a*) *вариация қулочи* дейилади.

$$\frac{n_i}{x_i - x_{i-1}} \quad (i=1,2,..,k)$$

нисбий частоталар тақсимотининг (x_{i-1}, x_i) интервалдаги *зичлиги* дейилади.

1-жадвал

Белгининг қийматлари	Частота
(x_0, x_1) (x_1, x_2) …… $(x_{л-1}, x_л)$	n_1 n_2 … $n_л$
Йиғинди	*n* танланма ҳажми

Барча интервалли айирмалар ўзаро тенг, яъни

$$x_i - x_{i-1} = h \quad (i=1,2..k)$$

бўлганда интервалли вариацион қатор энг содда бўлади, бу ҳолда частоталар тақсимотининг *i*-интервалдаги зичлиги $\frac{n_i}{h}$ га тенг.

Агар статистик тақсимот интерваллар ва уларга мос частоталар рўйхати билан берилган бўлса, у ҳолда частоталар гистограммаси қурилади.

Частоталар гистограммаси деб асослари $h_i = x_i - x_{i-1}$ узунликдаги интерваллар баландликлари мос ҳолда n_i/h_i нисбатига тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий шаклга айтилади. Интервал айирмалар тенг бўлган ҳолда ҳамма тўғри тўртбурчаклар битта *h* асосга эга бўлиб уларнинг баландликлари n_i/h_i га тенг бўлади. Абсциссалар ўқида қисмий интерваллар белгиланади, бу интерваллар устида баландликлари n_i/h_i (частота зичлигига) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклар ясалади.

Частоталар гистограммасининг юзи S барча частоталар йиғинди-сига , яъни танланма хажмига тенг.

Ҳақиқатдан ҳам агар i - қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи S_I бўлса, у ҳолда

$$S_i = h_i \frac{n_i}{h_i} = n_i, S = \sum_{i=1}^{л} S_i = \sum_{i=1}^{л} n_i = n.$$

2- расмда 2-жадвалда келтирилган n =75 ҳажмли частоталар тақсимотининг гистограммаси тасвирланган.

2-жадвал

қисмий интервал узунлиги h=3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
i-қисмий интер-вал варианта-лари частоталари-нинг йиғиндиси	6	9	12	21	18	6	3
Частоталар зичлиги n_i/n	2	3	4	7	6	2	1

Худди шундай нисбий частоталар гистограммаси, яъни асослари h_i (h_i -i- қисмий интервал узунлиги) узунликдаги интерваллар баланд-ликлари эса $\frac{\omega_i}{n}$ нисбатга (нисбий частота зичлиги) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий шакл ясалади. Равшанки нисбий

частоталар гистограммасининг юзи S барча нисбий час-тоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг. Ҳақиқатдан ҳам, агар S_i -
i - тўғри тўртбурчакнинг юзи бўлса, у ҳолда

$$S_I = h_i \frac{\omega_i}{h_i} = \omega_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} S_I = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{л} \frac{n_i}{n} = 1$$

4. Эмпирик тақсимот функция.

x нинг ҳар бир қиймати учун $X<x$ ҳодисанинг нисбий часто-тасини аниқлайдиган функция *эмпирик тақсимот функция* ёки *танланманинг тақсимот функцияси* дейилади .

Эмпирик тақсимот функцияни $F_n^*(x)$ билан белгилаймиз, агар n_x - x дан кичик варианталар сони , n –танланма ҳажми бўлса, у ҳолда таърифга кўра

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

бўлади. $F_n^*(x)$ функциянинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. $F_n^*(x)$ функциянинг қийматлари [0,1] кесмага тегишли;
2. $F_n^*(x)$ - камаймайдиган функция;
3. Агар a- энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x \le a$ да

$F_n^*(x)$ =0 *;* b-энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x.>b$ да $F_n^*(x)$=1. . Бош тўпламнинг тақсимот функцияси танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан фарқ қилиб *назарий тақсимот функция* дейилади.

Назарий ва эмпирик тақсимот функциялар орасидаги фарқ шундаки, биринчиси, $X<x$ ҳодисанинг эҳтимолини, иккинчиси эса шу ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайди. Катта сонлар ҳақидаги Бернулли теоремасидан келиб чиқадики *(X<x)* ходиса-нинг нисбий частотаси , яъни $F_n^*(x)$ шу ҳодисанинг эҳтимоли *F(x)* га эҳтимол бўйича яқинлашади.

Шу ернинг ўзиданоқ бош тўплам назарий тақсимот функциясини тақрибий тасвирлашда танланмининг тақсимот функциясидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича эмпирик тақсимот функциясини топинг

x_i (вариантaлар)	6	8	12	15
n_i (частоталар)	2	3	10	5

Ечиш. Танланманинг ҳажми

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 2+3+10+5 = 20.$$

Энг кичик варианта 6 га тенг, яъни $a=6$, демак $x \le 2$ да $F_{20}^*(x)=0$.

$X<8$ қиймат, яъни $x_1=6$ қиймат 2 марта кузатилган демак, $6<x\le 8$ да $F_{20}^*(x)=\frac{2}{10}=0{,}1.$

$X<12$ қиймат , яъни $x_1=6, x_2=8$ қийматлар 2+3=5 марта кузатилган. Демак , $8<x\le 12$ да $F_{20}^*(x)=\frac{5}{20}=0{,}25$. $X<12$ да яъни $x_1=6, x_2=8$ $x_3=12$ қийматлар 2+3+10=15 марта кузатилган демак, $12\le x\le 15$ да $F_{20}^*(x)=\frac{15}{20}=0{,}75.$ $x_1=b=15$ энг катта варианта бўлгани учун $x>15$ да

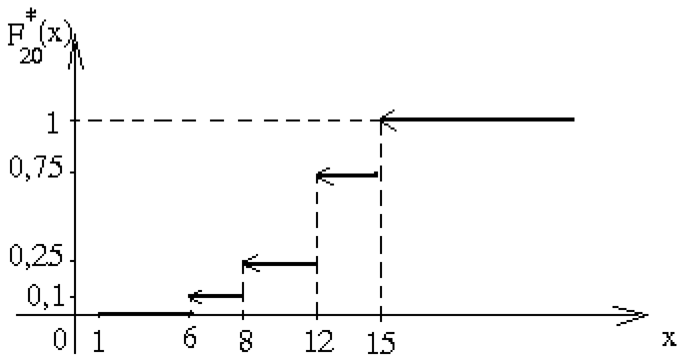
$$F_{20}^*(x)=\frac{20}{20}=1$$

Шундай қилиб, изланаетган эмпирик тақсимот функция

$$F_{20}^*(x)=\begin{cases} x \le 6 да 0 \\ 6 < x \le 8 да 0{,}1 \\ 8 < x \le 12 да 0{,}25 \\ 12 < x \le 15 да 0{,}75 \\ x > 15 да 1 \end{cases}$$

формула билан аниқланади.

Бу функциянинг графиги 3-расмда тасвирланган.



3-расм